|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **BTS DRB** | Lycée du Bois - Mouchard | **RAPPELS DE MATHEMATIQUES A L’USAGE DE LA MECANIQUE**  | **COURS** |
| **CHAPITRE** **2** |

**1 SYSTEME D’AXES DE REFERENCE**



X

Y

Z

*TZ*

*RZ*

En mécanique, les problèmes sont essentiellement spatiaux. Il est donc nécessaire de définir un système d'axes, appelé repère orthonormé direct et défini comme suit.

**1.1 Repère direct**

Le trièdre formé par 3 axes orthogonaux Ox, Oy, Oz est dit direct, lorsque, rabattant par une rotation l'axe Ox sur Oy, un tire-bouchon colinéaire à Oz et subissant la même rotation progresserait suivant les z croissants.

**1.2 Repère orthonormé**

X

Y

Z

Le trièdre ci-contre est direct orthonormé si les vecteurs de base ayant une même norme égale à 1, sont respectivement portés par les axes Ox, Oy, Oz.

X

Y

Z

A

XA

YA

ZA

**2 COORDONNEES D’UN POINT DANS UN REPERE SPATIAL**

Les coordonnées cartésiennes d'un point A sont :

XA, YA, ZA

**3 LE VECTEUR**

**3.1 Définition**

Le vecteur est une grandeur définie par un point d’application, une direction (ou support), un sens et un module (intensité ou norme).

X

Y

Z

A

B

**AB**

Exemple :

* Pt d’application : A
* Direction : droite AB
* Sens : de A vers B

Module : noté ||\_AB ||; c’est le nombre ***positif (ou nul)*** égal à la longueur du segment AB.

**3.2 Composantes scalaires**

X

Y

Z

A

B

**AB**

a

b

c

O

Dans une repère (O, £x, £y, £z ), les points A et B ont pour coordonnées respectives (xA, yA, zA) et (xB, yB, zB). On appelle composantes scalaires du vecteur \_AB dans la base (O, £x, £y, £z ) les trois nombres réels tels que :

a = xB - xA

b = yB - yA

c = zB - zA

Module du vecteur AB : ||\_AB || =

 a = + ||\_AB ||.cosα

A

**AB**

b

B

a

α

X

O

Y

x

y

\_AB b = + ||\_AB ||.sinα

 c = 0

\_AB = ||\_AB ||.cosα £x + ||\_AB ||.sinα £y

X

Y

Z

A

B

**AB**

a

b

c

α

β

 a = + ||\_AB ||.cosα.sinβ

\_AB b = + ||\_AB ||.cosα.cosβ

 c = + ||\_AB ||.sinα

\_AB = ||\_AB ||.cosα.sinβ.£x +

||\_AB ||.cosα.cosβ.£y + ||\_AB ||.sinα.£z



**4 CALCUL VECTORIEL**

**4.1 Somme de deux vecteurs**

**4.1.1 Résolution graphique**

**V1**

**V2**

**V3**

L'expression graphique de la somme de deux vecteurs \_ V1 et \_\_ V2 s'effectue sur deux bipoints particuliers qui sont les représentants respectifs de ces vecteurs \_ V3 a pour représentant le troisième côté du triangle construit à partir de vecteurs \_ V1 et \_\_ V2 .

\_ V3 = \_ V1 + \_\_ V2 (Attention : ||\_\_ V3 || **≠** ||\_\_ V1 || + ||\_\_ V2 ||)

**4.1.2 Résolution analytique**

Soient les vecteurs \_ V1 et \_\_ V2 de composantes respectives (a1, b1, c1) et (a2, b2, c2). Le vecteur \_ V3 = \_ V1 + \_\_ V2 aura alors pour composantes : a3 = a1 + a2 ; b3 = b1 + b2 ; c3 = c1 + c2.

**4.2 Produit d’un vecteur par un scalaire**

\_ V1

k\_ V1

k **>** 0

k **<** 0

\_ V1

k\_ V1

Soient le vecteur \_ V1 de composantes (a1, b1, c1) dans une base donnée et k un nombre réel (ou scalaire) ; alors le produit k\_ V1 est un vecteur dont les composantes ont pour expression (ka1, kb1, kc1).

\_ V1 et k\_ V1 ont même direction et si k est positif, même sens.

**4.3 Produit scalaire de deux vecteurs**

α

\_ V1

\_ V2

**4.3.1 Expression analytique**

Le produit scalaire du vecteur vecteurs \_ V1 (a1, b1, c1) par le vecteur \_ V2 (a2, b2, c2) est le nombre réel noté

\_ V1 .\_ V2 = a1.a2 + b1.b2 + c1.c2

**4.3.2 Interprétation graphique**

La relation exploitée en construction graphique est \_ V1 .\_ V2 = ||\_\_ V1 ||.||\_\_ V2 || cosα

où α = (\_ V1 ; \_ V2 ) est l’angle entre les supports (directions) des représentants de \_ V1 et \_ V2 .

On utilise souvent le produit scalaire pour exprimer le fait que deux directions sont perpendiculaires (produit scalaire nul).

**4.4 Produit vectoriel de deux vecteurs**

**4.4.1 Expression analytique**

 x1 x2 x1 x2 y1z2 - y2z1

Si \_ V1 y1 et \_ V2 y2 alors \_ V3 = \_ V1 **∧**\_ V2 = y1 **∧** y2 = x2z1 - x1z2

 z1 z2 z1 z2 x1y2 - x2y1

**4.4.2 Propriétés du produit vectoriel**

\_ V1 **∧**\_ V2 = - (\_ V2 **∧**\_ V1 )

\_ V1 **∧** ( \_ V2 + \_ V3 )= \_ V1 **∧**\_ V2 + (\_ V1 **∧**\_ V3 )

\_ V1 **∧** (k\_ V2 ) = k(\_ V1 **∧**\_ V2 ) = (k\_ V1 ) **∧** \_ V2

**4.4.3 Description graphique**

Soient \_ V1 et\_ V2 deux vecteurs. On appelle **produit vectoriel** de \_ V1 par \_ V2 , pris dans cette ordre, le vecteur \_ V3 noté \_ V3 = \_ V1 **∧**\_ V2 et défini ainsi :

* la direction de \_ V3 est perpendiculaire au plan formé par les directions de \_ V1 et \_ V2 ;
* la norme de \_ V3 est égale à ||\_\_ V1 **∧** \_\_ V2 || = ||\_\_ V1 ||.||\_\_ V2 ||.sinα avec α = (\_ V1 ; \_ V2 ) ;
* le sens de \_ V3 est celui du déplacement axial d’un tire-bouchon qui se déplace de \_ V1 vers \_ V2 en balayant l’angle saillant.

\_ V1

\_ V2

\_ V3



**α**

\_ V1

\_ V2

\_ V1

\_ V2

**α**

\_ V1

\_V2a

\_V2b

**SYSTEME EQUIVALENT**

\_ V1 **∧**\_ V2 = \_ V1 **∧**\_ V2a + \_ V1 **∧**\_ V2b

||\_\_ V1 **∧** \_\_ V2 || = ||\_\_ V1 ||.||\_\_ V2 ||.sinα = ||(\_\_ V1 **∧** \_\_ V2a) + (\_\_ V1 **∧** \_\_ V2b)|| = ||(\_\_ V1 **∧** \_\_ V2a)|| + ||(\_\_ V1 **∧** \_\_ V2b) ||

= ||(\_\_ V1 **∧** \_\_ V2b)|| = ||\_\_ V1 ||.||\_\_ V2b ||

Perpendiculaires

Angle 90°

Sin 90° = 1

Parallèles

Angle 0°

Sin 0° = 0